

教师资格考试标准预测试卷
数学学科知识与教学能力（初级中学）
参考答案及解析（六）~（十）
(科目代码:304)

目 录

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(六)参考答案及解析	(1)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(七)参考答案及解析	(6)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(八)参考答案及解析	(12)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(九)参考答案及解析	(18)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)标准预测试卷(十)参考答案及解析	(23)



扫码打印 首单免费

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学) 标准预测试卷(六) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C。解析： $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^5 + 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5^x \left(\frac{x^5}{5^x} + 1 \right)} = 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^5}{5^x} + 1}$ 。结合函数图像可知，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， 5^x 的增长速度远远快于 x^5 的增长速度，所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{5^x} = 0$ ，进而可知， $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^5 + 5^x} = 5$ 。故本题选 C。

2. 【答案】C。解析：直线 l_1 的一个方向向量 $s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5)$ ，直线 l_2 的一个方向向量 $s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-9, -3, -15)$ ，易知 $s_1 \parallel s_2$ ，且 l_1 上的点 $(-14, 0, -21)$ 不在 l_2 上，所以 $l_1 \parallel l_2$ 。故本题选 C。

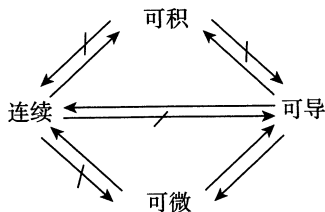
3. 【答案】B。解析：由题意可知， $|A| = 3$ ，则 $A^*A = AA^* = 3E$ 。在等式 $ABA^* = 2BA^* + E$ 两边同时右乘 A ，化简得 $3(A - 2E)B = A$ ，所以 $|B| = \frac{|A|}{3^3 |A - 2E|} = \frac{1}{9}$ 。故本题选 B。

4. 【答案】C。解析：因为连续型随机变量在离散点处的概率为 0，即 $P(|\xi| = a) = 0 (a > 0)$ ，所以当 $a > 0$ 时， $P(|\xi| < a) = P(|\xi| < a) + P(|\xi| = a)$ ， $P(|\xi| < a) = 1 - P(|\xi| \geq a) = 1 - P(|\xi| > a)$ ，故 (1)(4) 正确。当 $a > 0$ 时， $P(|\xi| < a) = P(-a < \xi < a) = P(\xi < a) - P(\xi < -a) = P(\xi < a) - [1 - P(\xi < a)] = 2P(\xi < a) - 1 = 2\Phi(a) - 1$ ，所以 (2) 正确，(3) 错误。故本题选 C。

5. 【答案】B。解析：因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 正定，所以 A 是正定矩阵，则 A 的所有顺序主子式应都大于 0，即有 $|2| > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 2(9 - a^2) > 0$ ，可得 a 的取值范围是 $-3 < a < 3$ 。故本题选 B。

6. 【答案】B。解析：一元函数在闭区间上可导则一定连续，但在闭区间上连续不一定可导，所以 (1) 错误，(2) 正确。“函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导”的充要条件是“函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微”，所以 (3) 正确。一元函数在开区间内连续，不一定可积，例如 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续，但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ，其在 $(0, 1)$ 内不可积，所以 (4) 错误。一元函数在闭区间上连续或在闭区间上有界且只有有限个间断点，则一定可积，但可积不一定连续，所以 (5) 正确。故本题选 B。

一元函数在闭区间上可积、可导、可微、连续的关系图如下：



7.【答案】C。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出，“在数学课程中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识”。故本题选C。

8.【答案】C。解析：描述结果目标的行为动词中，了解是从具体事例中知道或举例说明对象的有关特征；根据对象的特征，从具体情境中辨认或者举例说明对象。理解是描述对象的特征和由来，阐述此对象与相关对象之间的区别和联系。掌握是在理解的基础上，把对象用于新的情境。运用是综合使用已掌握的对象，选择或创造适当的方法解决问题。

二、简答题

9.【参考答案】

由题意可得， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x + b) = 1 + b$ ，而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$ ，因此 $1+b = \frac{1}{2} = a$ ，故可得 $a = \frac{1}{2}$ ， $b = -\frac{1}{2}$ 。

10.【参考答案】

平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 交线的一个方向向量 $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1)$ ，因为所求

直线 l 与两平面交线平行，所以 s 也是 l 的一个方向向量，又直线 l 过点 $(-3, 2, 5)$ ，所以直线 l 的方程为 $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ 。

11.【参考答案】

由 $MN = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2x-y & 4x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$ ，可得 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-y=13 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ ，所以 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 。下面用两种方法求矩阵 M 的逆矩阵。

(方法一)

$$(M, E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] = (E, M^{-1}), \text{ 所以}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}。$$

(方法二)

根据 $M^{-1} = \frac{M^*}{|M|}$ 计算。因为 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ，所以 $|M| = -5$ ， $M^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ ，因此 $M^{-1} = \frac{M^*}{|M|} =$

$$-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}。$$

12.【参考答案】

数据的集中趋势是指一组数据向某一中心值靠拢的倾向,度量集中趋势就是寻找数据一般水平的代表值或中心值。加权平均数不同于简单的算术平均数,简单的算术平均数只与数据的大小有关,而加权平均数还与数据的“权”相关,学生对“权”的意义和作用的理解决会有困难,数据与“权”往往混淆不清,只会利用公式,而不知加权平均数的统计意义。

在教学过程中,教师应设置问题情境,让学生在针对实际问题中的一组数据时,会根据具体情况赋予适当的“权”,并根据得到的加权平均数对实际问题做出简单的判断。“权”的重要性在于它反映的是数据的相对“重要程度”,在教学过程中,要列举典型的、贴近学生生活和具有现实意义的生活例子,通过实际问题的分析和解决,加深对“权”的理解和体会,渗透平均数和“权”的统计思想,帮助学生从算法、概念、统计三个角度去理解加权平均数。

13.【参考答案】

培养学生的符号意识,必须要有意识、有目的、有计划地渗透于教学的始终,根据学生的认知水平及年龄特点来设计教学任务,分阶段、有重点地逐步培养和发展。具体来说,应着重从以下三方面进行。

① 运用字母表示数。使用字母是用符号表示数量关系和变化规律的基础,用字母表示数是从算术的具体向代数的抽象的飞跃。使学生经历从具体情境中抽象出数量关系和变化规律的过程,逐步深理解符号的意义。

② 运用符号进行运算和推理。运用符号进行运算和推理是数学的基本特征,也是学生必备的能力之一。教师可采用由简入繁的步骤进行符号运算,通过层层推进,使学生掌握符号运算、推理的基本技能。

③ 在运用字母表示数与运用符号进行运算和推理的过程中,使学生逐步感受符号高度的集约性、抽象性、丰富性和精确性以及数学结论的一般性。

三、解答题

14.【参考答案】

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,根据积分中值定理知,存在 $\xi \in [a, b]$ 使得, $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi) = \int_a^b f(\xi) dx$, 进而有 $\int_a^b [f(x) - f(\xi)] dx = 0$ 。

取 $g_0(x) = f(x) - f(\xi)$, 则 $\int_a^b g_0(x) dx = 0$, $\int_a^b f(\xi) g_0(x) dx = 0$, ①。由已知可得, $\int_a^b f(x) g_0(x) dx = 0$, ②。

② - ① 得 $\int_a^b [f(x) - f(\xi)] g_0(x) dx = 0$, 即 $\int_a^b g_0^2(x) dx = 0$, 解得 $g_0(x) = 0$, 进一步得 $f(x) = f(\xi)$, 结论得证。

四、论述题

15.【参考答案】

归纳推理是由某类事物的不同对象具有某些特征,推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理。它是由部分到整体,由特殊到一般的推理,思维过程大致为由“实验、观察”到“概括、推广”再到“猜测一般性结论”。例如,在学习“勾股定理”内容时,教师以直角三角形的三边为边长分别向三角形外侧画出对应的正方形,让学生观察三个正方形面积的关系,再引导学生思考三个正方形面积的关系与直角三角形三边的关系,使其初步发现该直角三角形三边存在的关系,最后通过上述过程归纳出猜想,推广至一般性结论,即“勾股定理”。

类比推理是根据两个或两类对象有部分属性相同或相似,从而推出它们的其他属性也相同或相似的推理。它是由特殊到特殊的推理,思维过程大致为由“观察、比较”到“联想、类推”再到“猜测新的结论”。例如,在学习“立体几何”内容时,可以类比“平面几何”的性质特征,立体几何与平面几何的许多概念、性质是相似的,类比“长方形的每一边恰好与其相对的边平行,而与其相邻的边垂直”可以推出“长方体的每一面恰好与其相对的面平行,而与其相邻的面垂直”。

归纳推理和类比推理都属于合情推理,都是根据已有事实,经过观察、分析、比较、联想,之后进行归纳,类

比,然后提出猜想的推理。从推理结论来看,二者所得结论均不一定正确,有待进一步证明。合情推理是指“合乎情理”的推理,在数学的研究中,得到一个新结论之前所做的推理,归纳推理和类比推理常常帮助我们猜测和发现结论,为我们提供证明新结论的思路和方向。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)① 设计意图

巩固旧知,运用算术方法解题,提出问题,引出新知,引导学生运用代数的知识解题,从而建立新旧知识之间的联系;通过对比两种解题方法,学生感知代数解题的简便性,进而教师归纳出用代数解题的思路,引出本节课的内容。

② 教学目标

知识与技能目标:学会用算术方法和一元一次方程来求解问题,理解一元一次方程求解的思维过程,提升发现问题和解决问题的能力。

过程与方法目标:通过计算并观察算术方法与一元一次方程求解问题的不同,提升自主学习的意识。

情感态度和价值观目标:在探索学习的过程中,感受数学的开放性和创新性,提升学习数学的兴趣,树立学习数学的信心。

(2)《义务教育数学课程标准(2011年版)》对于各学段实施建议已经做出了系统的分析和尝试,为小学和初中的衔接指引了一个连贯、系统、发展的教学过程。对于如何做好小学和初中衔接内容的教学可以从以下几方面进行。

① 内容方面的衔接

七年级数学涉及的数、式和方程的内容与小学数学中学习的整数、简易方程、应用题等知识有关,但是比小学内容更加丰富、抽象,初中数学是在小学数学的基础上更加深化。

② 教学方法的衔接

a. 承上启下,注重新旧知识的联系;b. 从具体到抽象,从特殊到一般,因材施教;c. 因为在不同的年龄段,学生对知识的理解能力不同,所以在教学方法上应有所区别。

③ 学习习惯和学习方法的衔接

对于初中数学,不管从教材的编写还是课堂教学方式,都应注重学生自主学习能力的培养,比如小学学习的概念、法则、公式和定理等,都是通过“猜想-实验-操作-推理”等过程进行教学的,而初中数学则是通过“观察-思考-讨论-探究-归纳”等过程进行教学的,小学和初中都注重培养学生动手操作的学习习惯,在学习方法上,初中也是在小学的基础上更加注重自主思考探究能力的培养。

④ 思维方式方面的衔接

小学生的思维以具体形象思维为主,到初中逐步向抽象思维过渡。小学生一方面需要借助操作和直观等手段理解数学概念,另一方面需要通过运用类比、归纳等简单的演绎推理的方式理解和掌握数学概念公式等知识。到初中后,随着变量和演绎推理证明等知识的不断积累,学生的抽象思维能力和逻辑推理能力都会有所提高。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 本题具有开放性,题目设置合理即可,下面是几个示例:

设正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 2,

① 点 E 在什么位置时, $\triangle ENC$ 是有一个角为 30° 的直角三角形;

② 试写出 NC 与 EC 的数量关系;

③ 点 E 在什么位置时, $\triangle ENC$ 的面积取得最大值;

④ 当 $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$ 时,求 $\frac{AM}{BN}$ 的值。

(2) 教学过程

1. 复习旧知

提出问题：在之前学习的三角形知识中，有哪些常用的性质和定理？

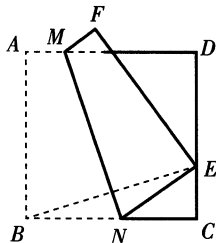
预设：① 全等三角形判定定理，② 相似三角形判定定理，③ 等腰三角形性质，④ 勾股定理……

找学生回答并追问，明确具体的性质和定理内容。

2. 讲授新知

在复习之前学过的知识后，结合(1)中②③进行“探究式”解题教学。

给出例题：如图所示，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 2，将正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使 B 点落在 CD 边上一点 E (不与 C, D 重合)，压平后得到折痕 MN ， A 点落在点 F 处。



问题 1：根据条件，能够获得哪些结论？

学生思考讨论，教师提问后总结： $AM = FM$ ， $BN = EN$ ， $\text{Rt}\triangle ENC$ ， MN 所在的直线是 BE 的垂直平分线 (需连接 BE)， $\angle NBE = \angle NEB$ ， $\angle ENC = 2\angle NBE$ ，……

问题 2：如果 $CE = \frac{1}{2}DE$ ， $CE = DE$ ，分别求 NC 。

学生思考后，提问并总结：由已知条件知 $CE = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{3}CD = \frac{2}{3}$ ， $CE = DE = \frac{1}{2}CD = 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle ENC$ 中， $EN + NC = BN + NC = BC = 2$ ，再利用勾股定理就可分别求出 NC 。

问题 3：如果设 $NC = x$ ， $EC = y$ ，试求 y 关于 x 的函数关系式。

引导学生在问题 2 的基础上思考解决问题 3 的方法后，教师小结：在 $\text{Rt}\triangle ENC$ 中利用勾股定理得到等量关系， $NC^2 + EC^2 = NE^2$ ， $x^2 + y^2 = (2 - x)^2$ ，整理得 $y = 2\sqrt{1 - x}$ ，得出 $0 < x < 1$ 。

问题 4：在问题 3 的基础上，我们还能得出什么结论？

学生思考讨论，教师提问后总结：可以求出 y 的取值范围，可以写出 $\triangle ENC$ 的周长和面积的表达式。

问题 5：写出 $\triangle ENC$ 的面积关于 x 的函数表达式。

通过渐进式的探究，将问题细化，使学生可以很容易地解决问题 5，订正答案： $S_{\triangle ENC} = \frac{1}{2}xy = x\sqrt{1 - x}$ ($0 < x < 1$)。

问题 6：求点 E 在什么位置时， $\triangle ENC$ 的面积取得最大值？

提示：之前的几个问题都是为了解决问题 6 做铺垫，在前五个问题的基础上研究问题 6，几何问题已经转化成函数求最值问题，即求函数 $S(x) = x\sqrt{1 - x}$ ($0 < x < 1$) 的最大值。

预留时间供学生解题。教师对本节课做小结：同学们，我们在学习数学的过程中要善于独立思考，学会在已知条件的基础上归纳概括得出结论，提高发现问题，提出问题并想办法去解决问题的能力。要大胆地去尝试，把看起来难的问题，细化成若干个可以解决的小问题，在不断探究不断深入的过程中就会自然而然地解决问题。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学)

标准预测试卷(七) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：因为 $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 p 级数， $p = 2 > 1$ ，级数收敛。所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right|$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 绝对收敛。故本题选 B。

2. 【答案】C。解析：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$ ，所以当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sqrt[n]{n} - 1$ 是 $\frac{1}{n}$ 的低阶无穷小量。 $n \rightarrow \infty$ 时， $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$ ， $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ ，所以 $1 - \cos \frac{1}{n}$ 是 $\frac{1}{n}$ 的高阶无穷小量， $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 是 $\frac{1}{n}$ 的等价无穷小量。因此，无穷小量阶数最高的是 $1 - \cos \frac{1}{n}$ 。故本题选 C。

3. 【答案】D。解析：因为向量 α 是 A^{-1} 的特征向量，所以 α 也是 A 的特征向量，则存在一个常数 λ ，有 $A\alpha = \begin{bmatrix} 3+k \\ 2+2k \\ 3+k \end{bmatrix} = \lambda\alpha = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda k \\ \lambda \end{bmatrix}$ ，所以 $k = \frac{2+2k}{3+k}$ ，解得 $k = 1$ 或 $k = -2$ 。故本题选 D。

4. 【答案】D。解析：球面的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 。旋转双曲面的方程：单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 。圆锥面方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z^2$ 。直线沿定曲线 C 移动形成的轨迹叫作柱面，抛物柱面的方程为 $y^2 = 2px$ 。 $y^2 = 2 - x$ 为母线平行于 z 轴，准线为 xOy 平面上的抛物线的抛物柱面。

5. 【答案】C。解析：他在每个十字路口遇到绿灯的概率为 $\frac{30}{20+30} = 0.6$ ，因为在每个路口遇到绿灯的事件相互独立，所以他在途中遇到绿灯的次数服从二项分布 $B(4, 0.6)$ 。根据二项分布方差的计算公式知，他在途中遇到绿灯的次数的方差为 $4 \times 0.6 \times (1 - 0.6) = 0.96$ 。故本题选 C。

6. 【答案】B。解析：因为非齐次线性方程组有无穷解的条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，且小于未知数的个数，所以根据题意对增广矩阵做初等行变换为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$ ，则 $\lambda - 1 = 0$ ，即 $\lambda = 1$ 时满足题意。故本题选 B。

7. 【答案】B。解析：三角形外接圆是与三角形各顶点都相交的圆，三角形的外接圆圆心是任意两边的垂直平分线的交点，所以三角形外接圆的画法依据是线段的垂直平分线上任意一点到线段两端的距离相等。C 项中，三角形内角的平分线上任意一点到角的两边距离相等是三角形内切圆的画法依据。A、D 两项的说法本身就错误。故本题选 B。

8. 【答案】A。解析：《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出，“课程总目标从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面阐述”。

二、简答题

9.【参考答案】

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

$$(2) \text{对线性方程组的增广矩阵作初等行变换可得 } (A, b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right], \text{要使原线性方程组}$$

有无穷多解,则有 $r(A, b) = r(A) < 4$, 所以有 $1 - a^4 = 0$, 且 $-a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$ 。

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{可知导出组的基础解系为}$$

$(1, 1, 1, 1)^T$, 非齐次方程组的一个特解为 $(0, -1, 0, 0)^T$, 故其通解为 $(0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数。

10.【参考答案】

(1) 记同时上网的人数为 ξ , 则至少 3 人同时上网的概率 $P(\xi \geq 3) = (C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6) \times 0.5^6 = \frac{21}{32} = 0.65625$ 。

(2) 设至少 $m (m \leq 6)$ 人同时上网的概率小于 0.3, 则 $P(\xi \geq m) = (C_6^m + \dots + C_6^6) \times 0.5^6 < 0.3$, 即 $C_6^m + \dots + C_6^6 < 19.2$ ①, 而 $C_6^6 = 1, C_6^5 = 6, C_6^4 = 15, \dots$, 当 $m = 5$ 时不等式 ① 成立, 而 $m = 4$ 时不等式 ① 不成立, 所以 $m = 5$, 即至少 5 人同时上网的概率小于 0.3。

11.【参考答案】

$$(1) \text{由题可知, } \vec{AB} = (0, 1, 2), \vec{AC} = (1, 2, -1), \text{所以 } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 2, -1), \text{由向量外}$$

积的几何意义可得, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ 。

(2) 四面体 $O-ABC$ 的体积即为以 OA, OB, OC 为三邻边的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$ 。由混合积的几何意义知, 以 OA, OB, OC 为三邻边的平行六面体体积等于三向量混合积的绝对值, 因为 $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$, 所以四面体 $O-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3}$ 。

12.【参考答案】

运用不等式来解决实际问题的教学本质就是解题的教学, 即解决实际问题的教学, 其关键点是结合不等式的相关知识建立适当的数学模型。

首先,教师应结合生活实际创设问题情境,供学生自主思考探究。如给出例题:某次数学竞赛共有 20 道题,每道题答对得 10 分,答错或不答扣 5 分,小明得分要超过 90 分,他至少要答对多少道题?

其次,教师带领学生复习一元一次不等式的相关旧知,让学生结合旧知思考问题,学生小组交流讨论,教师引导列式。

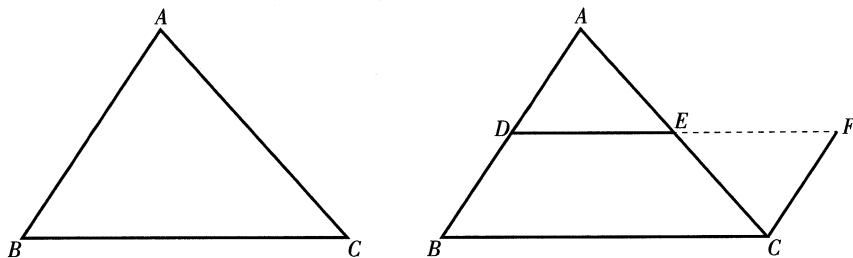
最后,教师讲解建立一元一次不等式数学模型的过程,向学生渗透模型思想,使学生感受数学知识与实际生活的联系。

13.【参考答案】

命题教学一般分为定理、公式、性质、法则等内容的教学,以定理教学为例,命题教学的一般环节如下。

(1) 结合新知内容,选取适当的引入方式引入定理,如教师创设情境让学生自主探究,之后得出定理的相关猜想。

例如,教师在教学中位线定理时,先带领学生回忆三角形及平行四边形的相关旧知,并创设问题情境:下图 $\triangle ABC$ 能否剪拼成平行四边形,如何剪拼? 学生自主探究,引导学生得出猜想:取 AB, AC 的中点连接后旋转 180° 。通过测量等方法得出 DE 与 BC 关系的猜想。

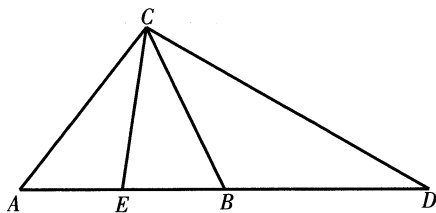


(2) 教师引导学生证明猜想,之后明确定理的内容,帮助学生进一步理解定理。如教师在教学的过程中,引导学生运用旧知证明猜想,帮助学生建立新旧知识之间的联系,最后讲授定理内容。

例如,在学生得出三角形中位线相关猜想后,教师引导学生利用平行四边形的判定定理,验证 DE 与 BC 的关系,从而证明猜想,得出相应结论。结合图形进行讲解, DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,其平行于 BC 且等于 BC 的一半。

(3) 熟悉定理的应用。教师要在学生理解定理的基础上做更进一步的教学,即向学生展示例题,教学定理的应用方法,从而使使学生逐步掌握定理并得以应用。

例如,教师出示三角形中位线定理的相关例题:在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, E 是 AB 中点,延长 AB 到 D ,使 $BD = AB$ 。求证: $CD = 2CE$ 。



(4) 引申和拓展定理的运用,引导学生对某些定理做适当的不同方向的推广,也是使学生认识定理之间关系的有效方法,同时也有利于培养学生的创造才能。

例如,教师出示与四边形相关的习题,展示三角形中位线定理在相关多边形题目中的应用。

三、解答题

14.【参考答案】

直线 l_1, l_2 上分别有定点 $P_1(-2, 2, -9), P_2(1, -6, -4)$, 其方向向量分别为 $s_1 = (0, 1, 8), s_2 = (1, 2, 12)$ 。

(1) 由于 $(s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \\ 3 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -81 \neq 0$, 即向量 $s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 不共面, 所以两直线异面。

(2) (方法一) 由于 $s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -4i + 8j - k$, 故过 l_2 与 l_1 平行的平面 π 的法向量为 $(-4, 8,$

$-1)$ 且过 $P_2(1, -6, -4)$, 其方程为 $-4(x-1) + 8(y+6) - (z+4) = 0$, 整理得 $4x - 8y + z - 48 = 0$ 。

则求两直线间的距离转化为求点 P_1 到平面 π 的距离, $d = \left| \frac{4 \times (-2) - 8 \times 2 + 1 \times (-9) - 48}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2}} \right| = 9$ 。

(方法二) 公垂线的方向向量 $l = s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -8, 5)$, 则两直线之间的距离等于向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在向量 l 方向上的投影的长度, 即 $d = \frac{|l \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|l|} = \frac{|-81|}{9} = 9$ 。

(3) 由题意知, 所求平面过线段 P_1P_2 的中点 $P(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{13}{2})$, 其法向量为 $s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1)$, 故所求平面方程为 $-4(x + \frac{1}{2}) + 8(y+2) - (z + \frac{13}{2}) = 0$, 即 $4x - 8y + z - \frac{15}{2} = 0$ 。

(4) 设公垂线为 l , 其方向向量 $l = s_1 \times s_2 = (-4, 8, -1)$ 。 l 与 l_1 相交所成平面 π_1 的法向量 $l \times s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 65i + 32j - 4k = (65, 32, -4)$, 又平面 π_1 过 $P_1(-2, 2, -9)$, 所以其方程为 $65(x+2) + 32(y-2) - 4(z+9) = 0$, 整理得 $65x + 32y - 4z + 30 = 0$ 。

π_1 与 l_2 的交点即为公垂线与 l_2 的交点 Q , 由 $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+4}{12} \\ 65x + 32y - 4z + 30 = 0 \end{cases}$, 解得 $Q(2, -4, 8)$ 。

所以公垂线的方程为 $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-8}{-1}$ 。

四、论述题

15. 【参考答案】

培养学生的数学应用意识, 要引导学生用学过的数学知识和思想方法去认识和解决实际生活中遇到的问题。函数建模问题, 也就是根据实际问题建立起数学模型, 只有根据题目的要求建立适当的函数模型, 才能成功地解决问题。建立函数模型的一般步骤如下。

① 抽象概括题意: 通过分析、画图、列表、归类等方法, 快速准确地弄清数据之间的关系, 数据的单位等; 研究实际问题中的变量, 确定变量之间的主动、被动关系, 并用 x, y 分别表示问题中的变量。

② 建立函数模型: 正确选择自变量将问题的目标表示为这个变量的函数, 建立函数模型的过程主要是抓住某些变量之间的相等关系列出函数关系式, 并将变量 y 表示为变量 x 的函数, 分析确定函数表达式属于哪种函数模型。

③ 求解函数模型: 根据实际问题所需要解决的目标及函数表达式的结构特点, 正确选择函数知识求得函数模型的解。主要是计算函数的特殊值, 研究函数的单调性, 求函数的值域、最大(小)值, 注意发挥函数图像的作用。

④ 验证结果: 应用问题不是单纯的数学问题, 既要符合数学学科特点, 又要符合实际背景, 因此解出的结果要代入原问题进行检验、评判, 最后得出结论, 做出回答。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 对该教师的教学目标评析如下：

① 该教师所拟定的教学目标主题明确，行为动词恰当；

② 符合当前学生的基本学情，在提高推导、论证能力和逻辑思维能力这一点上没有说明通过什么方法，有所欠缺；

③ 欠缺情感态度与价值观方面的目标。

(2) 该教师的教学思路的不足之处主要有以下几点：

① 在教学平行四边形的性质时，多媒体展示旋转过程只能得出平行四边形是中心对称图形的性质，不能严谨地得出其他性质；

② 对平行四边形对边、对角相等的性质没有设计探究、教学思路；

③ 没有相对具体地阐述平行四边形对角线互相平分的推导证明过程；

④ 没有结合相应例题，供学生思考和向学生讲解平行四边形在相关数学问题上的应用；

⑤ 教师与学生的互动不多，学生自主探究、合作交流的活动过程没有很好地体现。

(3) 培养学生的空间观念主要有以下几点：

① 利用实物模型，培养直观认识

在教学过程中，尽可能多地让学生多观察、接触各种几何体，通过大量的模型、实物形成对各种几何体的直观认识。在实践中体会物体的不同呈现方式，获得初步的空间感。

② 利用信息技术，展示变化过程

在数学课堂中，运用现代信息技术，让学生进行充分的视觉感知，能够帮助学生更好地建立空间观念。多媒体教学直观、生动、形象，有利于激发学生的兴趣，可以调动学生的学习积极性。积极开发和有效利用各种课程资源，合理应用现代信息技术，注重信息技术与课堂内容的整合，能有效地改变教学方式，提高课堂教学的效果。

③ 突出动手操作，积累活动经验

动手操作能使学生在大脑中留下空间图形的映象，从而建立空间观念。教师应鼓励、指导学生在课前、课后利用各种材料，自己动手制作一些模型；让学生在制作的过程中，发现模型的特点，从而形成正确的空间图形概念；让学生通过动手操作，对自己的猜想加以验证，不断丰富自己的活动经验。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 学生在学习了有理数、数轴、相反数等概念后，能够用数轴上的点表示有理数，知道数轴上的点到原点的距离，并能比较这些距离的大小，已经具备了一定的数形结合的能力。

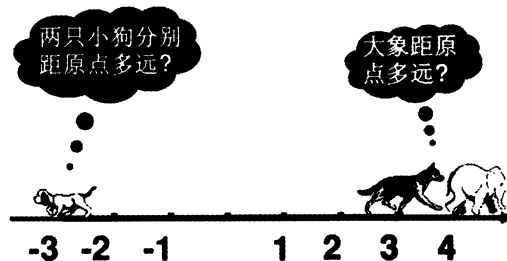
(2) 教学重点：① 初步理解绝对值的意义；② 会求一个有理数的绝对值。

教学难点：① 有理数绝对值概念的形成及运用；② 用数形结合的思想理解绝对值的意义。

(3) 教学过程

一、创设情境，导入新课

出示 PPT 让学生观察图片中的两只小狗、一头大象分别距原点多远。设置问题：



问题 1: 右边这只小狗距原点有多远? 左边这只小狗距原点有多远? 两只小狗距原点的距离相同吗?

问题 2: 两只小狗在数轴上对应的数分别是什么?

问题 3: 大象距原点的距离有多远? 它比右边这只小狗距原点是远还是近?

【设计意图】利用动画展示, 让学生在有趣的问题情境中获取对绝对值概念的感性认识, 并激发学生学习的积极性与主动性。

二、学习新课, 理解概念

1. 引入绝对值的概念

一般地, 数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫作数 a 的绝对值, 记作 $|a|$ 。

2. 理解绝对值的概念

由刚才的图片知道两只小狗所在的位置到原点的距离都是 3, 也就是说 3 和 -3 的绝对值都是 3; 大象距原点的距离是 4, 那么 4 的绝对值就是 4。即 $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|4| = 4$ 。

3. 给出几对相反数, 在课堂上讨论它们的绝对值, 然后引发学生思考: 互为相反数的数的绝对值有什么关系?

结论: 互为相反数的两个数的绝对值相等。

4. 让学生两两之间为一组, 每人分别写出三个正数、三个负数和零, 让对方写出这些数的绝对值。观察有什么发现, 引导学生总结绝对值的性质。

结论: 正数的绝对值是它本身; 负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0。

三、知识巩固

学生自己完成练习 1。

大家一起讨论, 教师提问, 完成练习 2, 3。

四、课堂小结

略。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学) 标准预测试卷(八) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析：由变上限积分求导公式得， $F'(x) = f(\ln x)(\ln x)' - f\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x}f(\ln x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$ 。故本题选 A。

2. 【答案】A。解析：直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{m} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (2, 4, -2)$ ，平面的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ ，则 $\sin\theta = |\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-6|}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。

3. 【答案】D。解析：已知线性方程组有解，则其系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。

将 $AX = K\beta_1 + \beta_2$ 的增广矩阵化成阶梯形矩阵，

$$(A, K\beta_1 + \beta_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2K+1 \\ -1 & -2 & 1 & K+3 \\ 1 & -1 & -1 & 3K-1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2K+1 \\ 0 & -1 & 0 & 3K+4 \\ 0 & -2 & 0 & K-2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2K+1 \\ 0 & -1 & 0 & 3K+4 \\ 0 & 0 & 0 & -5K-10 \end{array} \right]。$$

$AX = K\beta_1 + \beta_2$ 有解 $\Leftrightarrow r(A, K\beta_1 + \beta_2) = r(A) = 2$ ，得 $-5K-10 = 0$ ，即 $K = -2$ 。

4. 【答案】C。解析：因为 $P\{|x - \mu| < \sigma\} = P\left\{\frac{|x - \mu|}{\sigma} < 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$ ，该概率与 σ 无关，故保持不变。

5. 【答案】B。解析：A 项中，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在，该数列发散；B 项中，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ，所以数列 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ 收敛；C 项和 D 项中，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n} = +\infty$ ，所以数列 $\{n^2\}$ 和数列 $\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}$ 均发散。故本题选 B。

6. 【答案】D。解析：由 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ，得 $y = b\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$ ， $0 \leq x \leq a$ 。令 $\sqrt{\frac{x}{a}} = t$ ， $0 \leq t \leq 1$ ，则 $dx = 2atdt$ 。曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 和两坐标轴所围成的面积 $S = \int_0^a b\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \int_0^1 b(1-t)^2 2atdt = 2ab \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt = \frac{ab}{6}$ 。

7. 【答案】A。解析：“割圆术”是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积并以此求取圆周率的方法，是对极限思想的灵活运用。

8. 【答案】C。解析：《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出，现代信息技术的作用不能完全替代原有的教学手段，其真正价值在于实现原有的教学手段难以达到甚至达不到的效果。例如，利用计算机展示函数图像、几何图形的运动变化过程；从数据库中获得数据，绘制合适的统计图表；利用计算机的随机模拟结果，引导学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率等等。在应用现代信息技术的同时，教师还应注重课堂

教学的板书设计。必要的板书有利于实现学生的思维与教学过程同步,有助于学生更好地把握教学内容的脉络。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 根据茎叶图知,景点甲中游客数超过 130 人的概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 。根据题意知,随机变量 $\xi \sim B\left(4, \frac{2}{5}\right)$, 所以 $P(\xi \leq 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = C_4^0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^3 + C_4^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{513}{625}$ 。

(2) 根据茎叶图知,景点甲中游客数不低于 125 人且不高 于 135 人的概率为 $\frac{1}{10}$; 景点乙中游客数不低于 125 人且不高 于 135 人的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

根据题意知, η 的取值为 0, 1, 2。

$$P(\eta = 0) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{50},$$

$$P(\eta = 1) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{9}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{21}{50},$$

$$P(\eta = 2) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{25}.$$

η 的分布列如下表:

η	0	1	2
P	$\frac{27}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{1}{25}$

$$E(\eta) = 0 \times \frac{27}{50} + 1 \times \frac{21}{50} + 2 \times \frac{1}{25} = \frac{1}{2}.$$

10.【参考答案】

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3$, 则 $F'_x = 2x - 2, F'_y = 2y + 2, F'_z = 2z - 4$ 。所以 $F'_x(3, -2, 4) = 4, F'_y(3, -2, 4) = -2, F'_z(3, -2, 4) = 4$ 。进而可知, 过点 $(3, -2, 4)$ 的切平面方程为 $4(x - 3) - 2(y + 2) + 4(z - 4) = 0$, 整理得 $2x - y + 2z = 16$ 。

11.【参考答案】

两矩阵相似, 则 $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B})$ (矩阵的迹: 主对角线元素之和), $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ 。因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 所以有 $\begin{cases} 1 + 3 = 6 + b, \\ 3 - 8 = 6b + a, \end{cases}$ 解得 $a = 7, b = -2$ 。 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 。

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0, \text{解得 } \lambda = -1 \text{ 或 } 5.$$

当 $\lambda = -1$ 时, $(-\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值 -1 对应的特征性向量为 $\alpha_1 = (-2, 1)^T$;

当 $\lambda = 5$ 时, $(5\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值 5 对应的特征性向量为 $\alpha_2 = (1, 1)^T$ 。

$$\text{令 } \mathbf{P}_1 = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{则 } \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

因为两矩阵相似,所以矩阵 B 的特征值也为 -1 和 5 。进而有,

当 $\lambda = -1$ 时, $(-E - B) = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值 -1 对应的特征性向量为 $\beta_1 = (-1, 1)^T$;

当 $\lambda = 5$ 时, $(5E - B) = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值 5 对应的特征性向量为 $\beta_2 = (-7, 1)^T$;

令 $P_2 = (\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 使得 $P_2^{-1}BP_2 = A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 。

由 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$,

存在可逆矩阵 $P = P_1P_2^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 使

得 $P^{-1}AP = B$ 。

12.【参考答案】

有理数是一个整数 a 和一个正整数 b 的比,它是整数和分数的集合。有理数和无理数统称为实数。

如果 A 概念的外延包含 B 概念的外延,那么这两个概念之间的关系称为从属关系,其中 A 概念叫作 B 概念的属概念(上位概念), B 概念叫作 A 概念的种概念(下位概念)。结合有理数和实数的概念可以知道,“有理数”是“实数”的种概念,“实数”是“有理数”的属概念,二者概念之间的关系为从属关系。

“平行四边形”相对于“四边形”是种概念,“四边形”相对于“平行四边形”是属概念,“平行四边形”和“四边形”概念之间的关系为从属关系。“平行四边形”和“四边形”均为“矩形”的属概念,所以一个概念的属概念是不唯一的。

13.【参考答案】

教师可以通过恰当的问题,或者准确、清晰、富有启发性的讲授,来引导学生积极思考,激发学生的好奇心。例如,在“二次根式”的教学中可以采用问题串的形式来引入。

教师也可以通过恰当的归纳和示范,使学生理解知识、掌握技能、积累经验、感悟思想。例如,在“勾股定理”的新课导入中可以通过介绍毕达哥拉斯的故事,激发学生好奇心,引发学生对新知的兴趣和思考。

教师引导时应关注学生的差异性,用不同层次的问题或教学手段,引导每一个学生都能积极参与学习活动,从而提高教学活动的针对性和有效性。

三、解答题

14.【参考答案】

σ 的秩等于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的秩。对矩阵 A 进行初等行变换, $A \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{所以 } r(A) = 2, \text{即得 } \sigma \text{ 的秩为 } 2。$$

$\sigma^{-1}(0) = \{X \mid \sigma(X) = 0\}$, 又 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为 A , 所以 $\sigma^{-1}(0)$ 为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间。易知 $AX = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = \left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T$, $\alpha_2 = (-1, -2, 0, 1)^T$, 通解为 $k_1 \left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T + k_2 (-1, -2, 0, 1)^T$ 。所以核 $\sigma^{-1}(0) = \{X \mid X = k_1 \left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T + k_2 (-1, -2, 0, 1)^T\}$,

k_1, k_2 为任意实数。

四、论述题

15.【参考答案】

在数学课堂上,教师恰当地运用类比思想,可以促进学生对知识的理解与吸收,能够加深学生的知识掌握程度,提高其知识应用能力。

① 概念形成中的有效类比

概念教学是理论知识教学的重要组成,在概念教学中,教师可以充分利用类比思想作为辅助。中学数学中很多知识点存在相似性,教师可以灵活地运用类比思想来辅助理论知识的教学,并且在比较与联系的过程中来帮助学生构建知识体系,充分发挥类比教学的功效,极大地促进学生对概念的理解与吸收。

② 知识整合时的有效类比

教师可以引导学生以类比的形式来实现对于新知识点的理解与吸收,也可以让学生在知识点间的类比与对照中更好地认识知识点的实质,以及相互间的差异,这些都是很有效的教学过程,不仅能够帮助学生实现知识的良好整合,也会保障学生对于每一个具体的知识点都有更好的理解与掌握。

③ 问题解决时的类比探究

在很多实际问题的解答中,培养学生掌握问题解决的方法是教学的核心,这也是学生知识应用能力的一种良好体现。教师可以有意识地开展对于类比思想的应用,可以让学生在问题解答时类比一些有效的思想方法,并且通过解题技巧的迁移来化解很多实际问题。这是一种很好的教学策略。让学生学会用类比的思想来解决很多实际问题,这会极大地提升学生的知识应用与实践能力。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 虽然两位学生的计算结果都是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,但学生 A 在分母有理化的时候分子分母同乘 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,如果 $a = b$,这一步就不符合分式的运算性质,即学生 A 的解法有逻辑错误。学生 B 的解法是正确的。

(2) 教学过程

师:两种解法的计算结果一样,都是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,大家觉得有什么问题吗?可以大胆地说出来。

教师预留时间供学生思考讨论,并做如下引导。

师:分母有理化的时候分子、分母同乘 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,如果 $a = b$,会出现什么问题?还符合分式的运算性质吗?

预留时间供学生验证交流,之后进行小结。

师:在计算的过程中很多时候看着正确,细细探究却是有点问题的,这个时候就不能相信直觉,而是要有严密的逻辑思维。在数学的推理计算过程中,每一步都要有理有据、合情合理,即使再简单的过程都要有依据,大家要养成多问自己“为什么可以这样做”的习惯,培养严谨的思维习惯。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学重点:① 介绍分式的概念,学生学会判断什么是分式;② 学生能够根据题意写出分式。

教学难点:① 分式的值为正数、负数的条件以及建立与所学知识之间的关联;② 根据题意列出分式;③ 学生掌握分式有无意义的条件。

(2) 课题引入

教师课件出示如下问题。

问题 1: 已知 A 车的速度为 n km/h, B 车比 A 车每小时多行驶 20 km, ① A 车 2 小时行驶_____ km, B 车 2 小时行驶_____ km; ② 如果甲、乙两地之间的路程为 m km, 那么从甲地到乙地, A 车和 B 车所用的时间各为_____ h。

问题 2: 期中考试, 小明语、数、英三科的成绩分别为 80 分, a 分, 70 分, 那么他三科的平均分为_____。

问题 3: 长方体的体积为 100, 长为 a , 宽为 b , 则高为_____。

教师让学生回答问题,并把上面所得的式子按“已学”和“未学”进行分类,讲出知识点。

学生回答,教师评价后小结:A车2小时行驶 $2n$ km;B车每小时行驶 $(n+20)$ km,2小时行驶 $2(n+20)$ km,这是我们学过的“整式”的知识;甲、乙两地之间的路程为 m km,则从甲地到乙地,A车用时 $\frac{m}{n}$ h,B车用时 $\frac{m}{n+20}$ h,这个式子没有学过;小明三科的平均分为 $\frac{80+70+a}{3} = \frac{150+a}{3}$,这个式子没有学过;长方体的体积 $V = abh$ (h 代表高),则长方体的高为 $\frac{100}{ab}$,这个式子和分数的形式很像但不是分数。

教师带领学生回顾“整式”相关旧知:单项式是数字与字母的乘积;多项式是单项式的和,不含字母的项叫作常数项;单项式和多项式统称为整式。(教师板书)

引入“分式”:在“数”的海洋中,我们学过“整数”和“分数”。那么,在“式”的世界中,与“整式”对应的是什么呢?接下来就让我们一起学习“分式”吧!

【设计意图】结合课件问题,让学生独立思考,自主探究,培养学生分析问题和解决问题的能力;让学生按已学和未学分类,使其回顾关于“式”的知识体系,紧抓“式”是用运算来描述这一特征的;问题设计涵盖生活以及几何旧知,一方面让学生感受数学与生活实际的紧密结合,另一方面帮助学生巩固旧知;通过复习旧知,建立新旧知识之间的联系,培养学生的迁移能力。

(3) 教学片段

一、认识分式

活动一:教师让学生观察引入环节中课件出示的问题,学生思考、讨论“分式”和“分数”及“整式”的异同。(学生讨论后汇报,教师做适当评价)

教师小结:分数的分子和分母都是数,而问题2的答案中分子是含有字母的式子,分母是数;问题1的第2问分子和分母都有字母,问题3的答案中分子是数,分母是字母。整式是单项式与多项式的统称,不涉及分母和分子。

教师讲授:一般地,如果 A, B 表示两个整式,并且 B 中含有字母,那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫作分式。和分数一样,分式中 A 叫作分子, B 叫作分母。

活动二:教师让学生结合“分式”的概念,找出课件问题中的分式。

教师订正结果:问题3中的 $\frac{100}{ab}$ 。问题1第二问中的 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{m}{n+20}$ 都是分式。

活动三:教师课件出示如下问题,让学生找出“分式”。(学生自主作答,教师巡视指导)

课件问题: $\frac{2}{3x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{5-3b}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{2}{3}, \frac{2c}{7}, \frac{x-y}{4}, 7a+3b+2, 2n$ 。

订正结果: $\frac{2}{3x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{5-3b}, \frac{x+y}{x-y}$ 都是分式; $\frac{2}{3}$ 是分数不是分式; $\frac{2c}{7}, \frac{x-y}{4}$ 不是分式,因为其分母不含字母; $7a+3b+2$ 是多项式,其中2是常数项; $2n$ 是单项式。

二、分式有意义的条件

提出问题1:分数有意义的条件是什么?分式呢?

(结合旧知,指出使分式有意义的条件是,分母不为0)

提出问题2:分式 $\frac{2}{3x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{5-3b}, \frac{x+y}{x-y}$ 一定有意义吗?使其有意义的条件是什么?

活动四:教师让学生小组讨论,教师巡视。(学生讨论后汇报,教师做适当评价)

订正结果:要使 $\frac{2}{3x}$ 有意义,必须使分母 $3x \neq 0$,即 $x \neq 0$;

要使 $\frac{x}{x-1}$ 有意义,必须使分母 $x-1 \neq 0$,即 $x \neq 1$;

要使 $\frac{1}{5-3b}$ 有意义, 必须使分母 $5-3b \neq 0$, 即 $b \neq \frac{5}{3}$;

要使 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义, 必须使分母 $x-y \neq 0$, 即 $x \neq y$ 。

提出问题 3: $\frac{x+y}{x-y}$ 在什么情况下等于零?

活动五: 教师请几名学生回答, 结合学生回答情况, 做适当评价。

预设有学生回答: 当 $x = -y$ 时, $\frac{x+y}{x-y} = 0$ 。

教师引导学生补充: $x, y \neq 0$ 时, 上述结果成立。

教师小结: 要使分式有意义, 分式的分母表示除数, 由于除数不能为 0, 所以分式的分母不能为 0, 也就是形如 $\frac{A}{B}$ 的分式中, $B \neq 0$ 。要使分式为 0, 在分母不为 0 的前提下使其分子为 0 即可。注意思考问题要全面。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学) 标准预测试卷(九) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D。解析： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 存在极限值, 且在该点无定义, 所以 $x = 0$ 为可去间断点。

2. 【答案】B。解析: 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 6z = 10$ 为球面, 将其化为标准方程为 $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 36$, 所以球心的坐标为 $(1, -4, -3)$ 。根据几何性质可知, 所求的切平面垂直于过点 $(5, -2, 1)$ 和 $(1, -4, -3)$ 的直线, 即可得切平面的一个法向量 $\mathbf{n} = (4, 2, 4)$, 所以所求的切平面的方程为 $4(x-5) + 2(y+2) + 4(z-1) = 0$, 化简得 $2x + y + 2z = 10$ 。故本题选 B。

3. 【答案】A。解析: $3\alpha + \beta - \gamma$ 的坐标为 $(5, -4, -4)$, $\alpha - \beta + \gamma$ 的坐标为 $(-1, 4, 0)$, 所以 $(3\alpha + \beta - \gamma) \times (\alpha - \beta + \gamma) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 16\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k} = (16, 4, 16)$ 。故本题选 A。

4. 【答案】B。解析: 以行列式第 k 列展开 $D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{2n,k}A_{2n,k} = -na^2 + na^2 = 0 (k < 2n)$ 。故本题选 B。

5. 【答案】D。解析: 离散型随机变量的概率分布之和等于 1, 即 $\sum_{k=1}^N P(X=k) = \sum_{k=1}^N \frac{kc}{N} = c \frac{N(N+1)}{N} = 1$, 所以 $c = \frac{2}{N+1}$ 。故本题选 D。

6. 【答案】B。解析: 非齐次线性方程组有唯一解的充要条件是系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 且等于未知数的个数。对题中线性方程组的增广矩阵作初等变换, $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{bmatrix}$, 只有当 $\lambda-1 \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 时, $r(A) = r(A, \mathbf{b}) = 3$, 此时方程组有唯一解。

7. 【答案】C。解析: 费马是微积分的先驱者, 他在求曲线围成的图形的面积过程中, 提出用微分子法求极大、极小值的步骤, 这是早期微积分的雏形。

8. 【答案】A。解析: 义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程, 具有基础性、普及性和发展性。

二、简答题

9. 【参考答案】

过直线 $\begin{cases} 2x + y - 2z + 1 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $\lambda(2x + y - 2z + 1) + \mu(x + 2y - z - 2) = 0$, 即 $(2\lambda + \mu)x + (\lambda + 2\mu)y - (2\lambda + \mu)z + \lambda - 2\mu = 0$, 其中 λ, μ 不同时为 0。要使所求平面与平面 $x + y + z - 1 = 0$ 垂直, 则有 $(2\lambda + \mu) \times 1 + (\lambda + 2\mu) \times 1 - (2\lambda + \mu) \times 1 = 0$, 整理得 $\lambda = -2\mu$, 不妨令 $\mu = -1$, 则 $\lambda = 2$, 所求平面方程为 $3x - 3z + 4 = 0$ 。

10. 【参考答案】

使方程 $4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$ 无实根的条件是 $\Delta = 16K^2 - 16(K+2) < 0$, 解得 $-1 < K < 2$ 。因为随机变量 K 在 $(-2, 6)$ 上服从均匀分布, 所以使该方程无实根的概率为 $P\{-1 < K < 2\} = \frac{2 - (-1)}{6 - (-2)} = \frac{3}{8}$ 。

11.【参考答案】

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0, \text{实对称矩阵 } A \text{ 的特征值为 } -1(\text{二重}),$$

$$5. \text{ 当 } \lambda_1 = -1 \text{ 时, } (-E - A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 可得实对称矩阵的特征值 } -1 \text{ 对应的特征向}$$

$$\text{量 } \alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T; \text{ 当 } \lambda = 5 \text{ 时, } (5E - A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 可得实对}$$

称矩阵的特征值 5 对应的特征向量 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 。

因为实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交, 所以 α_3 与 α_1, α_2 正交, 从而只需对 α_1, α_2 施密

特正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$ 。对 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 单位化, $\gamma_1 =$

$\frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T, \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$ 。实对称矩阵 A 经正

$$\text{交变换 } Q^T A Q \text{ 可以得到对应的对角矩阵为 } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } Q = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}。$$

12.【参考答案】

数学课堂教学导入的方法主要有直接导入法、复习导入法、事例导入法、趣味导入法、悬念导入法和类比导入法等。结合题目例子, 下面主要介绍复习导入法和类比导入法。

(1) 复习导入法

复习导入法即所谓的“温故而知新”, 主要是利用新旧知识之间的逻辑联系, 贯彻巩固与发展相结合的原则, 找出新旧知识之间的联结点, 将旧知的复习迁移到新知的学习上来导入新课。通过这种方法来导入新课, 一方面可以帮助学生巩固旧知, 另一方面可以建立新旧知识之间的联系, 能有效降低学生对于新知的认知难度。运用这种导入方法教师应摸清学生原有的知识水平, 精选复习、提问时新旧知识联系的“支点”。

以“相似三角形”为例, 学生在学习这一内容之前学习过“比例”的相关知识, 而“比例”恰恰是根据两幅图形长、宽的等比关系来进行学习的。因此, 教师可以结合“比例”的相关知识点, 运用“复习导入法”, 在学习新知前带领学生复习“比例”的相关知识, 帮助学生找到新旧知识之间的联结点, 即构成比例的前提是比值相等, 相似三角形各边的相似比相等。之后, 带领学生学习新知。

(2) 类比导入法

类比是指当两个对象都有某些相同或类似属性, 而且已经了解其中一个对象的某些性质时, 推测另一种对象也有相同或类似性质的思维形式。类比导入法就是以这种思维形式为基础, 通过新知与旧知之间的类比, 在旧知的基础上探索发现新知的。类比导入法简洁明快, 既培养了学生类比推理的能力, 又能高效地调动学生思维的积极性。

以“相似三角形”为例, 学生在学习新知之前学习过“全等三角形”的相关知识。两个三角形全等, 其对应边的比值为 1, 教师可以抓住这一特性, 采用“类比导入法”, 让学生通过观察全等三角形和相似三角形的对比图, 结合全等三角形的性质特征来类比分折相似三角形的性质特征。

13.【参考答案】

数据随机主要有两层含义,一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能是不同的,另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律,例如,袋子中有若干个红球和白球,一方面,每次摸出的球的颜色可能是不一样的,事先无法确定;另一方面,有放回重复摸多次,从摸到的球的颜色数据中就能发现一些规律,比如红球多还是白球多,红球和白球的比例等。

三、解答题

14.【参考答案】

由题意得, $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 即为由基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵。

设存在非零向量 ζ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。由坐标变换公式知, $(x_1, x_2, x_3)^T$ 满足 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 则有 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (E - A) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 即 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 是齐次线性方程组 $(E - A)x = 0$ 的一个非零解, 又 $|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 所以齐次线性方程组 $(E - A)x = 0$ 只有零解, 因此不存在非零向量 ζ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 和基 η_1, η_2, η_3 下有相同的坐标。

四、论述题

15.【参考答案】

“数学活动经验”是一种基本的数学素养,也是数学教学关注的目标之一。课堂教学是学生积累数学活动经验的主要阵地,在教学中,教师要重视数学实践活动,积累活动经验。活动是经验的源泉,不亲历实践活动就根本谈不上经验。课堂实践活动是学生运用学具按照学习内容和教师要求进行的实际活动,它有助于学生理解和掌握所学知识。例如,在学习“平行四边形”时,可以让学生动手制作或画出不同的平行四边形,找出其特点。数学源于生活,根植于生活。数学教学要从学生的生活经验、已有知识出发,把生活经验数学化,将数学问题生活化。例如,学习“平行线”时,我们可以以马路上的斑马线、笔直的铁轨等为例,来引导学生思考学习。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 导入环节的设计意图

以生活实际为背景创设问题情境,一方面可以让学生了解新知内容在生活实际中的应用,感受生活中的数学;另一方面可以活跃课堂气氛,激发学生探究新知的热情,充分调动学生学习新知的积极性。

(2) 活动的设计意图

从整体上看,四个活动的探究内容层层递进,符合学生的认知过程,使学生由浅入深地获取新知。活动一是让学生对等腰三角形有一个初步的了解;活动二是在活动一的基础上进一步明确等腰三角形的相关概念,并结合等边三角形的概念做类比学习;活动三是活动四探究内容的操作背景,活动三、四是对等腰三角形相关性质进一步的探索和学习。

整个“实验操作、探究规律”环节留给学生充足的时间和空间进行实践、探究和交流,充分体现了教学过程中学生的主体地位,可以培养学生一定的动手能力、合作交流的意识,以及一定的数学活动经验,这对激发学生

生学习数学的积极性和提升学生分析、解决问题的能力都有一定的意义。

(3)①问题是数学的心脏。问题的解决允许运用直观的方法,还应当鼓励学生不停留在直观的认识上,要进行合情地推理、精确地计算,科学地判断。本案例把“问题”贯穿于教学的始终,运用“提出问题——探究问题——解决问题”的方式,让学生发现规律和运用规律,使学生在长知识的同时,也长智慧、长能力,进一步培养学生良好的思维品质。

②让数学思想方法渗透于课堂教学之中。本案例引导学生通过折一折的活动体会“转化”思想,由对等腰三角形的对折联系到轴对称。同时渗透数学与实践相结合的辩证唯物主义思想,培养学生的应用意识。

③由于学生对等腰三角形的知识已有初步的认识,本课的难点应在等腰三角形的“三线合一”及其应用上,创设有利于学生学习的情境(生活中的事例),通过“折”这一直观方法引导学生进行积极主动地探索、交流,从而习得知识和经验,提高能力和兴趣。

④在数学活动中要真正让每一位学生积极行动起来,能提出自己的方法和建议,成为数学活动中的一分子,要培养学生相对独立地获取知识的能力,使其逐步学会运用分析、类比、转化等方法。本课中围绕一个“折”字较为成功地体现了这一点。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 例题1的设计意图

例题1的证明需要构造辅助线,即从 D 点向 AB 作垂线,交 AB 于 E 点,然后根据角平分线的性质(角的平分线上的点到角的两边的距离相等)和题中条件得到 $CD = DE, AC = AE$,再根据题中条件分析 $\triangle DEB$ (等腰直角三角形),进而得到 $DE = EB$,从而可证得 $AC + CD = AE + DE = AE + EB = AB$ 。因此,在练习过程中可以进一步使学生理解角平分线的性质定理,学会利用角平分线的性质解决问题,顺利达成①和②的教学目标。同时根据找到的相等的线段,将要求证明的等式 $AC + CD = AB$ 进行转化,可以进一步提高学生利用转化的数学思想解决问题的能力,辅助线技巧的引入,有助于开拓学生的思维方式,丰富学生掌握的数学解题方法。

例题2的设计意图

例题2是一个实际应用题,问题的解决需要学生深刻理解角平分线的性质并会把该数学性质与实际问题联系在一起,懂得将实际问题抽象成为一般的数学模型,进一步加深了学生对角平分线性质的认识,并利用该性质解决实际问题,能够达成①和②的教学目标。问题的解决需要学生用尺规作图法解答,从而顺利达成③的教学目标。

(2) 教学过程

教师在多媒体上播放例题1中的图片,先给予学生一段时间自主思考,独立解答,教师巡查。若绝大多数学生能够顺利解答出答案,则教师挑选几个学生在黑板上写下自己的证明过程,并让其说出依据,教师给予一定的评价。若学生的解答有困难,则教师让学生分组讨论,集思广益,在交流合作中得出结果,同时教师通过设问的方式层层引导学生思考,降低习题的难度。

问题1:由 $\angle ACB = 90^\circ, AD$ 平分 $\angle CAB$ 可以得到什么结论?(CD 的长度表示的是 $\angle CAB$ 平分线上一点 D 到边 AC 的距离)

教师将 BD 擦去,让学生观察。

问题2:由问题1可知 CD 的长度表示的是 D 点到边 AC 的距离,根据角平分线性质的性质,思考一下 D 点到 $\angle CAB$ 另一边 AB 的距离怎么表示呢?(引导学生作辅助线)

问题3:根据所作的辅助线,可以得到哪些相等的线段?($AC = AE, CD = DE$,所以 $AC + CD = AE + DE$)

问题4:想想还有什么条件没用, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEB$ 是特殊三角形吗?

学生经过教师的启发,自主思考解答,当大多数学生得出正确结论后,教师随机让学生谈一谈解答步骤、思考过程以及之前思考时的误区,总结心得,教师给予积极评价。最后,教师可以在多媒体或黑板上给出证明过程。

证明：从 D 点向 AB 作垂线，交 AB 于 E 点（如图），

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$ ，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $DE \perp AB$ ，

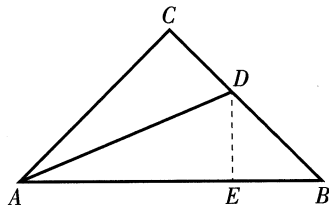
$\therefore AC = AE$ ， $CD = DE$ ，

$\because AC = BC$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \triangle DEB$ 也是等腰直角三角形，

$\therefore DE = EB$ ，

$\therefore AC + CD = AE + DE = AE + EB = AB$ 。



小结提纲 1：题中给出角平分线条件时，要思考角平分线带来的隐含条件，如最基本的平分出两个相等的角，角平分线上的点到角的两边的距离相等。要学会挖掘题设的隐含条件，这就需要我们扎实地掌握基础知识，能够做到举一反三。

小结提纲 2：当直接解答困难时，可以适当地添加辅助线，将问题转化为容易求解或证明的形式。辅助线的添加需要对题目有深刻的认识以及对相关基础知识的牢固把握，所以需要重视对基础知识的学习并且要做有针对性的练习。

小结提纲 3：知识之间有着多种关联性，题目的考察也不可能只涉及一个知识点（如本题不仅涉及角平分线性质的考察，还涉及等腰直角三角形性质的知识），这就要求我们要融会贯通，合理地利用已学知识，具体分析求解。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(初级中学) 标准预测试卷(十) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D。解析：由等价无穷小替换知， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} = 0$ ，由“无穷小量乘以有界量仍为无穷小量”知， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 g(x) = 0$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在且为0。而 $f(0) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，又 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ ， $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = 0$ ，所以 $f'_+(0) = f'_-(0)$ ， $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导。故本题选D。

2. 【答案】A。解析：直线 l 的一个方向向量 $l = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 10 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 7(4i - 2j - k)$ ，平面 π 的一个法向量 $n = (2, 6, -4)$ ，易知 $l \perp n$ ，又直线 l 上一点 $(\frac{13}{7}, 0, -\frac{4}{7})$ 不在平面 π 上，所以直线 l 平行于平面 π 。

3. 【答案】D。解析： X 服从二项分布， $X \sim B(100, 0.2)$ ，所以 $E(X) = 100 \times 0.2 = 20$ ， $D(X) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$ 。所以 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 16 + 20^2 = 416$ 。

4. 【答案】D。解析：根据函数的奇偶性可知， $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + x}{1 + x^2} dx = 0$ ， $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0$ ， $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx < 0$ ，则有 $P < M < N$ 。故本题选D。

5. 【答案】C。解析： $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & \lambda - 6 & \lambda - 12 \\ -2 & \lambda - 1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 0 & \lambda - 12 \\ -2 & \lambda + 1 & -3 \\ -3 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 6 & \lambda - 12 \\ -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 9) = 0$ ，故矩阵的特征值为 $-1, 0, 9$ 。

6. 【答案】B。解析：曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切向量为 $(1, 2, 3)$ ，所以曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的法平面方程为 $1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - 1) = 0$ ，化简得 $x + 2y + 3z - 6 = 0$ 。

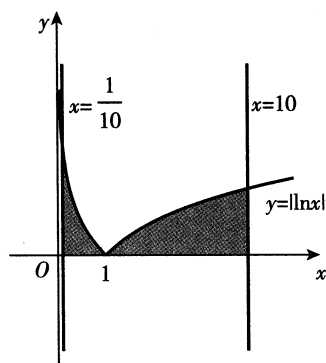
7. 【答案】B。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出，“经历借助图形思考问题的过程，初步建立几何直观”“能独立思考，体会数学的基本思想和思维方式”都属于数学思考的课程目标。所以“通过反比例函数图像画法的全过程，体会无限趋近的思想”属于数学思考方面的内容。

8. 【答案】D。解析：《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出，“解简单的三元一次方程组”是选学内容，不做考试要求。故本题选D。

二、简答题

9. 【参考答案】

如图， $S = \int_{\frac{1}{10}}^{10} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{10}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{10} \ln x dx = -(x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{10}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{10} = \frac{99}{10} \ln 10 - \frac{81}{10}$ 。



10. 【参考答案】

$$(1) P\{X=1|Z=0\} = \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{2 \times \frac{C_1^1 C_2^1}{6^2}}{\frac{C_3^1 C_3^1}{6^2}} = \frac{4}{9}.$$

(2) X, Y 的可能取值均为 $0, 1, 2$, 且

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{C_3^1 C_3^1}{6^2} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, P\{X=0, Y=1\} = \frac{2C_2^1 C_3^1}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_2^1 C_2^1}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P\{X=1, Y=0\} = \frac{2C_1^1 C_3^1}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2C_1^1 C_2^1}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P\{X=1, Y=2\} = 0,$$

$$P\{X=2, Y=0\} = \frac{C_1^1 C_1^1}{6^2} = \frac{1}{36}, P\{X=2, Y=1\} = 0, P\{X=2, Y=2\} = 0.$$

所以, 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/3	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/36	0	0

11. 【参考答案】

(1) 由交空间的维数公式知, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$, 其中 $\dim W_1 =$

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 3, \dim W_2 = r(\beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = 2, \dim(W_1 + W_2) =$$

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 4, \text{ 所以 } \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

(2) 由(1)知 $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, 所以交空间的一个基只有一个非零向量, 不妨设为 $\alpha_0 (\alpha_0 \neq 0)$, 则存在一组实数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , 有 $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 = \alpha_0 (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \text{ 不全为 } 0)$,

$(a_1, a_2, a_3, -b_1, -b_2)^T$ 即为线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)X = 0$ 的一组非零解。计算得线性方程组的一组非零解为 $(6, -2, 0, -3, 1)^T$, 则 $\alpha_0 = 6\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = 3\beta_1 - \beta_2 = (4, 10, -4, -10)^T$, 即为 $W_1 \cap W_2$ 的一个基。

12.【参考答案】

“勾股定理”是中学数学中一个非常重要的定理,在中学数学课程中具有重要作用:

①“勾股定理”很好地解释了直角三角形中三条边之间的数量关系,将学生对几何的感性认识精确化,向学生渗透数形结合思想,使几何学中有关直角三角形的计算及证明问题迎刃而解;

②“勾股定理”在中学数学中有广泛应用,如线段求长问题,图形折叠问题,解三角形问题等,所以“勾股定理”的学习是对中学数学课程其他几何问题的铺垫和深化;

③“勾股定理”与生活实际相结合,在中学数学课程的教学使学生得以感受数学与生活的密切联系。

13.【参考答案】

正确的运算必须建立在透彻理解算理的基础之上,学生只有在清楚算理的情况下,才能有条不紊地进行运算。运算能力是思维能力与运算技能的结合,是解决问题的一种必备能力。培养学生的运算能力必须从训练、协调、发展运算的各能力因素入手。

首先,要完成从知识到技能的过渡,重点是准确理解相关知识,随着运算技能的形成,逐渐简化运算步骤,灵活运用法则和公式。

然后,计算能力初步形成后,还必须在今后的应用中得到巩固、发展和深化。在应用过程中,运算的目的不一定只是追求一个简化的结果,还要有一定的推理、演绎、判断过程。

最后,运算能力培养的出发点和着眼点不仅仅是计算,尤为重要是促进学生思维品质的提升,促进学生对算理、算法的理解,对解题策略的合理、灵活地运用。

教师在具体教学时,要重视培养学生良好的运算习惯,以算法思想统领数学解题活动,重视数学思想对运算的指导作用。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 任取 $x, y \in V_1$, 则 $(x, \alpha) = 0, (y, \alpha) = 0$. 因为 $(x+y, \alpha) = (x, \alpha) + (y, \alpha) = 0$, 所以有 $x+y \in V_1$, 即加法封闭; 设 $k \in P$, 有 $(kx, \alpha) = k(x, \alpha) = 0$, 所以 $kx \in V_1$, 即数乘也封闭, 所以 V_1 是 V 的子空间。

(2) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1$, 则 $(x, \alpha) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, 因为 $\alpha \neq 0$, 所以 $r(\alpha) = 1$, 进而可知, 齐次线性方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ 含有 $n-1$ 个线性无关的解向量。这 $n-1$ 个线性无关解向量是 V_1 的一个基, 所以 V_1 的维数等于 $n-1$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

“人人都能获得良好的数学教育,不同的人在数学上得到不同的发展。”这里的“人人”指的是学习数学课程的所有人,是大众教育,而不是指少数人。知识技能、数学思考、问题解决、情感态度价值观的整体发展是“良好教育的标志”。“不同的人在数学上得到不同的发展”,这是对人的主体性地位的回归与尊重。平时在教学中要注重学生的主体性地位,正视学生的差异,尊重学生的个性,促进学生更好地自主发展。例如,课程的设计要满足学生未来生活、工作和学习的需要。使学生掌握必需的数学基础知识和基本技能,发展学生的抽象思维和推理能力,培养其应用意识和创新意识,在情感态度与价值观等方面都要得到发展。因此,在数学教学过程中,可以采用多层次教学。多层次教学法能够提高我们教与学的目的性、层次性和主动性,克服千篇一律,千人一面的被动性与盲目性,从真正意义体现“以人为本,因材施教”的新课程精神。使每个层次的学生都能达到“跳一跳,够得着”的境地,让学生体验到学习的快乐,从而激发他们的学习热情。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 对该备课组拟定的教学目标的评析如下:

① 该目标目的明确,贴合初中生关于勾股定理的教学要求,目标主体明确,行为动词恰当;

② 就知识与技能目标而言,上述目标还存在一些不足,学生在对勾股定理的学习过程中,为使其深入理解勾股定理,还应使其了解勾股定理的文化背景等;

③ 三维目标还包括过程与方法目标和情感态度与价值观目标,而备课组拟定的教学目标中对这两方面的内容没有具体体现。

教学目标

知识与技能目标:① 了解勾股定理的文化背景,体验勾股定理的探索过程,理解和掌握勾股定理的内容;

② 了解勾股定理的面积证法和数形结合的思想,掌握勾股定理的简单应用。

过程与方法目标:① 在结合图形探索勾股定理的过程中,体验数学思维的严谨性,发展形象思维和合情推理能力;② 体验解决问题方法的多样性,养成合作交流意识和探索精神。

情感态度与价值观目标:动手探究数学的奥妙,感受数形结合的美。

(2) 教师甲通过对“赵爽弦图”的介绍直接引入勾股定理的内容,之后结合毕达哥拉斯的探索过程,让学生感受定理内容,最后通过练习题进行知识巩固。这种教学方法以直接导入的方式引入新知,紧扣教学目标,直接给出教学目的,从而有效地引起学生的有意注意,使学生直接进入学习状态;通过介绍毕达哥拉斯的探索过程,诱发学生探索新知的兴趣。虽然这种教学方式能使使学生迅速定向,使其可以把握整节课的概念和基本轮廓,能提高课堂效率,但是这种方法由于缺乏学生自主探索的过程,不能使学生充分感受数形结合的思想,不能有效地培养学生独立思考的习惯。此外,课程整体氛围有些枯燥,教师与学生的互动较少,这样难以引发学生的学习兴趣,不能很好地引起学生共鸣。

教师乙首先以讲故事的手段介绍毕达哥拉斯的发现和探索过程,运用趣味导入法引入新知,有效地激发学生对于新知的兴趣。然后,教师让学生运用面积法自主探索新知,提出猜想,培养了学生自主学习的能力,使其感受数形结合思想和以形证数的过程。之后,教师通过介绍“赵爽弦图”的证明方法证明猜想,使学生从不同角度体会数形结合思想,发展形象思维。最后,通过对刘徽证明勾股定理方法的拓展介绍,使学生感受不同的割补方法,充分感受以形证数的思想内涵。教师乙的教学方式虽然不能在开篇使学生直接把握课程目的,但是十分贴合三维教学目标,使学生对于勾股定理有深刻的理解,加深学生对于勾股定理知识内容的记忆。但教师乙的教学过程也存在一些不足:没有使学生充分了解勾股定理在实际解题中的运用。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 相似三角形的判定定理:① 平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似;② 三边成比例的两个三角形相似;③ 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似;④ 两角分别相等的两个三角形相似。

(2) 问题引入片段

出示问题:如图1所示,任意画两条不平行的直线 l_1, l_2 ,再画三条与 l_1, l_2 相交的平行线 l_3, l_4, l_5 ,分别测量 AB, BC, DE, EF 的长度,则 $\frac{AB}{BC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 相等吗? $\frac{AB}{AC}$ 与 $\frac{DE}{DF}$ 相等吗?任意平移 l_3 , $\frac{AB}{AC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 还相等吗?

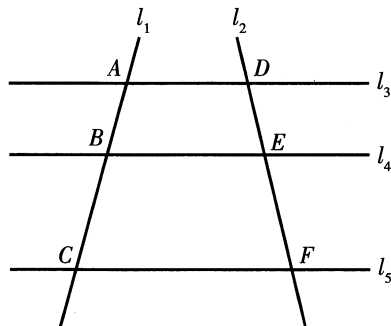


图1

让学生思考问题,教师继续提出问题:我们之前学过图形的相似,那么相似多边形的性质是否也适用于相似三角形呢?能类似于两个三角形全等,给出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似的表示方法吗? $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k ,那么 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比也是 k 吗?如何判定两个三角形相似呢?

【设计意图】设计问题情境,让学生自主探究平行线分线段成比例的定理,为相似三角形的判定定理做铺垫;结合全等三角形,多边形相似比等旧知设问,引导学生进行类比学习,培养其类比思想。

(3) 教学片段

选取定理:平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似。

教师出示问题:如图2,在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$,且 DE 分别交 AB, AC 于 D, E , $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 有什么关系?

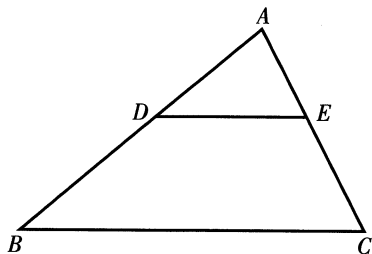


图2

活动一:教师请学生观察图片,归纳猜想 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的关系,然后学生小组讨论交流自己的猜想结果,并对自己的猜想给予证明。

小组代表分享交流结果,教师听取结果后总结:通过观察,我们发现 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 可能是相似的。

提问:两三角形相似的定义是什么?(对应角相等,对应边成比例)

活动二:引导学生利用三角形相似的定义证明上述问题,学生自主证明,教师巡视指导。

找学生板书,订正完善如下:

过点 E 作 $EF \parallel AB$,交 BC 于点 F ,如图3,

(教师:先证两个三角形的角分别相等)

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle A$,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C$ 。

(教师:再证明两个三角形的边成比例)

$\therefore DE \parallel BC, EF \parallel AB$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$ 。

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = BF, \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}, \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ 。

教师:这样,我们就证明了 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的对应角相等,对应边成比例,所以 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似。

活动三:教师让学生回顾证明过程,找到问题的已知和要证的结论,小组交流,自主归纳出结论。

教师总结出三角形相似的判定定理:平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似。

【设计意图】教师以三个教学活动切入,让学生对问题进行猜想证明,最后得出定理,从而培养学生自主学习、独立探究的意识;提升学生的逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力;结论的自主归纳,可以培养学生的语言表达能力,提升其归纳能力。

(4) 习题:如图4,已知菱形 $BDEF$ 内接于 $\triangle ABC$,点 D, E, F 分别在 AB, AC 和 BC 上,若 $AB = 18 \text{ cm}, BC = 15 \text{ cm}$,求菱形的边长。

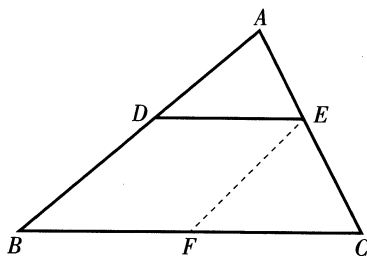


图3

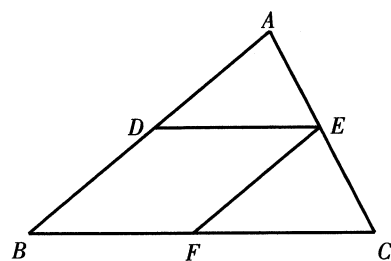


图 4

解题过程: 设菱形的边长为 x cm, 则 $DE = EF = BF = BD = x$,

$\therefore DE \parallel BC, EF \parallel AB$,

$\therefore \angle AED = \angle C, \angle A = \angle CEF$,

$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 相似, $\frac{DE}{FC} = \frac{AD}{EF}$,

$$\therefore \frac{x}{15-x} = \frac{18-x}{x}.$$

故 $x = \frac{90}{11}$, 即菱形的边长为 $\frac{90}{11}$ cm。

公众号：编途指南

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力历年真题及标准预测试卷. 初级中学 / 中公教育教师资格考试研究院编著. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2016. 4(2021. 7 重印)

国家教师资格考试专用教材

ISBN 978-7-5192-1016-8

I. ①数… II. ①中… III. ①中学数学课-教学法-初中-中学教师-资格考试-习题集
IV. ①G633. 602-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 068754 号

书 名 国家教师资格考试专用教材·数学学科知识与教学能力历年真题及标准预测试卷(初级中学)
GUOJIA JIAOSHI ZIGE KAOSHI ZHUANYONG JIAOCAI · SHUXUE XUEKE ZHISHI YU JIAOXUE NENGLI
LINIAN ZHENTI JI BIAOZHUN YUCE SHIJUAN (CHUJI ZHONGXUE)

编 著 中公教育教师资格考试研究院

责任编辑 夏 丹

特约编辑 宋 帅

出版发行 世界图书出版公司北京公司

地 址 北京市东城区朝内大街 137 号

邮 编 100010

电 话 010-64038355(发行) 64037380(客服) 64033507(总编室)

网 址 <http://www.wpcbj.com.cn>

邮 箱 wpcbjst@vip.163.com

销 售 各地新华书店

印 刷 河北品睿印刷有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 18

字 数 432 千字

版 次 2016 年 4 月第 1 版

印 次 2021 年 7 月第 29 次印刷

国际书号 ISBN 978-7-5192-1016-8

定 价 42.00 元

如有质量或印装问题,请拨打售后服务电话 010-82838515